الــــدوال الأسيـــــة ذ الرقبة

Fonctions exponentielles

I- الدالــة الأسيــة النبـريـــة :

تمهيــد :

نعلم أن دالة اللوغاريتم النبري $\ln$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

إذن الدالة $\ln$ تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

إذن : تقبل دالة عكسيــة معرفة مـن $\mathbb{R}$ نحـــو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريــف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبري هي الدالة الأسيـــة النبريـــة والتي نرمز لها بـ $\exp$.

استنتـــاج : $\forall x\in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y\in \mathbb{R}$

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y$$

ملاحظـة : $\forall x\in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp(x) = e^x$

خاصيـات :

-1 $\exp(1) = e^1 = e$

$\exp(0) = e^0 = 1$

-2
- $\forall x\in \mathbb{R} \quad ; \quad e^x \succ 0$
- $\forall x\in \mathbb{R} \quad ; \quad \ln e^x = x$
- $\forall x\in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad e^{\ln x} = x$

-3 الدالة $\exp$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
- $e^x \succ e^y \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

-4
- $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

-5 نهايـــات مهمـــة :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} x\, e^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

-6 مشتقة الدالــة الأسيـــة النبريـــة :

لدينا : $\forall x\in \mathbb{R} \; ; \quad Log\, e^x = x$

إذن : $\forall x\in \mathbb{R} \; ; \quad \left(Log\, e^x\right)' = 1$

أي : $\forall x\in \mathbb{R} \; ; \quad Log'\left(e^x\right) \times \left(e^x\right)' = 1$

$$\forall x\in \mathbb{R} \; ; \quad \frac{\left(e^x\right)'}{e^x} = 1$$

إذن : $\forall x\in \mathbb{R} \; ; \quad \left(e^x\right)' = e^x$

تعميــم :

لتكن f دالة عددية معرفــة بــ : $f(x) = e^{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

فإن : f قابلة للاشتقاق على المجال I.

$$\forall x \in I \; ; \; f(x)' = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

الـــدالة الأسيـــة للأســـاس a

تـمـهـيــد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : هي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريــف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى الدالة الأسية للأساس a، ونرمز لها بــ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتــاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(x) = y \iff x = \exp_a(y)$$

ملاحظة :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \exp_a(x) = a^x$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; a^x = e^{x \ln a}$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; 1^x = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; a^x \succ 0$

دراسة الدالــة $f\left(x \mapsto a^x\right)$

1- مجموعــة التعريــف :

$$D = \mathbb{R} = \left]-\infty \, , \, +\infty\right[$$

2- النهــايـــات :

- **الحالــة 1 :** $a \succ 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

- **الحالــة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{-\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيـــرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; a^x = e^{x \ln a}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$

ومنه إشارة $\left(a^x\right)'$ هـــي إشارة $\ln a$.